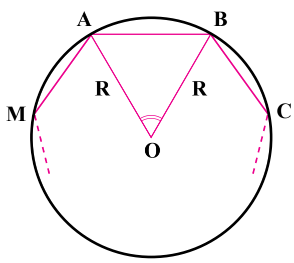
بحثی در باب
مساحت چندضلعی‌های منتظم

حسین کریمی
دبیر ریاضی شهر تهران

می‌دانیم مساحت سه‌ضلعی منتظم (مثلث متساوی‌الاضلاع) به ضلع a برابر است با: $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$ و مساحت چهارضلعی منتظم (مربع) به ضلع a برابر است با: $a^{۲}$. اکنون می‌خواهیم برای به‌دست آوردن مساحت nضلعی منتظم یک رابطهٔ کلی به‌دست آوریم.

فرض کنیم nضلعی منتظم ABC...M، به ضلع a، محاط درون دایره‌ای به مرکز O باشد. پس: $A\hat{O}B = \frac{۳۶۰^{\circ}}{n}$ (شکل ۱).



شکل ۱

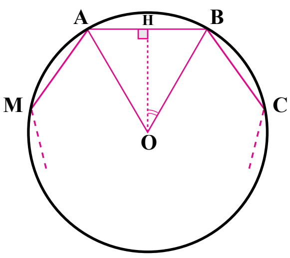
و چون مثلث AOB متساوی‌الساقین است، بنابراین OH هم‌ارتفاع، هم‌میانه و هم‌نیم‌ساز زاویهٔ AOB محسوب می‌شود (شکل ۲). بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} BH = \frac{a}{۲} \\ \angle HOB = \frac{۱۸۰^{\circ}}{n} \end{array}\right\}$$

در مثلث OBH داریم:

$$\tan H\hat{O}B = \frac{BH}{OH} \Rightarrow \tan\frac{۱۸۰^{\circ}}{n} = \frac{\frac{a}{۲}}{OH}$$

$$\Rightarrow OH = \frac{a}{۲\tan\frac{۱۸۰^{\circ}}{n}}$$



شکل ۲

پس مساحت مثلث OAB از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$S_{OAB} = \frac{۱}{۲}AB\times OH = \frac{۱}{۲}\times a\times\frac{a}{۲\tan\frac{۱۸۰^{\circ}}{n}}$$

$$\Rightarrow S_{OAB} = \frac{a^{۲}}{۴\tan\frac{۱۸۰^{\circ}}{n}}$$

از طرف دیگر، می‌دانیم که در nضلعی منتظم ABC...M، n مثلث یکسان به مانند AOB داریم، پس:

$$S_n = \text{مساحت nضلعی منتظم به ضلع a} = S_n = nS_{OAB}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{na^2}{4\tan\frac{180^\circ}{n}}$$

● **مثال ۱.** مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را به‌دست آورید.

$$S_3 = \frac{3a^2}{4\tan\frac{180^\circ}{3}} = \frac{3a^2}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

● **مثال ۲.** مساحت مربع به ضلع a را به‌دست آورید.

$$S_4 = \frac{4a^2}{4\tan\frac{180^\circ}{4}} = \frac{4a^2}{4\times 1} = a^2$$

اکنون برای به‌دست آوردن مساحت پنج‌ضلعی منتظم، شش‌ضلعی منتظم، هشت‌ضلعی منتظم و دوازده‌ضلعی منتظم به ضلع a، به جدول زیر توجه می‌کنیم:

زاویه	$\frac{\pi}{12}$ یا 15°	$\frac{\pi}{8}$ یا $22^\circ 30'$	$\frac{\pi}{6}$ یا 30°	$\frac{\pi}{5}$ یا 36°	$\frac{\pi}{4}$ یا 45°	$\frac{\pi}{3}$ یا 60°
تانژانت	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{2}-1$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	1	$\sqrt{3}$

◆ **مسئلهٔ ۱.** مساحت دوازده‌ضلعی منتظم به ضلع ۵ را به‌دست آورید.

$$S_{12} = \frac{12a^2}{4\tan 15^\circ} = \frac{12\times 25}{4(2-\sqrt{3})} = \frac{75}{2-\sqrt{3}} = 75(2+\sqrt{3})$$

◆ **مسئلهٔ ۲.** مساحت هشت‌ضلعی منتظم به ضلع ۴ را به‌دست آورید.

$$S_8 = \frac{8a^2}{4\tan(22^\circ 30')} = \frac{8\times 16}{4(\sqrt{2}-1)} = \frac{32}{\sqrt{2}-1} = 32(\sqrt{2}+1)$$

◆ **مسئلهٔ ۳.** مساحت شش‌ضلعی منتظم به ضلع ۳ را به‌دست آورید.

$$S_6 = \frac{6a^2}{4\tan 30^\circ} = \frac{6\times 9}{4\times\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{81}{2}\sqrt{3}$$

◆ **مسئلهٔ ۴.** مساحت پنج‌ضلعی منتظم به ضلع ۲ را به‌دست آورید.

$$S_5 = \frac{5a^2}{4\tan 36^\circ} = \frac{5\times 4}{4\sqrt{5-2\sqrt{5}}} = \frac{5}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$$

بدیهی است که هر قدر تعداد اضلاع را در nضلعی منتظم بیشتر کنیم (یعنی n را به سمت ∞ میل دهیم)، nضلعی منتظم به سمت دایره شدن میل خواهد کرد که از اینجا می‌توانیم به کمک ماشین‌حساب، تقریب‌های خوبی برای عدد π به‌دست آوریم.

با توجه به شکل ۲ داریم:

$$\sin H\hat{O}B = \frac{BH}{OB} \Rightarrow \sin\frac{180^\circ}{n} = \frac{\frac{a}{2}}{R}$$

$$\Rightarrow R = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}} \Rightarrow S_{\text{دایره}} = \pi R^2 = \frac{\pi a^2}{4\sin^2\frac{180^\circ}{n}}$$

حال برای nهای بزرگ، مساحت nضلعی منتظم و مساحت دایره را هم‌ارز در نظر می‌گیریم که داریم:

$$S_n \equiv S_{\text{دایره}} \Rightarrow \frac{na^2}{4\tan\frac{180^\circ}{n}} \equiv \frac{\pi a^2}{4\sin^2\frac{180^\circ}{n}}$$

$$\Rightarrow \frac{n\cos\frac{180^\circ}{n}}{\sin\frac{180^\circ}{n}} \equiv \frac{\pi}{\sin^2\frac{180^\circ}{n}} \Rightarrow \pi \equiv n.\sin\frac{180^\circ}{n}.\cos\frac{180^\circ}{n}$$

با توجه به اتحاد «$\sin\alpha.\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$» داریم:

$$\pi \equiv \frac{n}{2}.\sin\frac{360^\circ}{n}$$

و برای مقادیر مختلف n داریم:

$$n = 6 \to \pi \equiv \frac{6}{2}.\sin 60^\circ \Rightarrow \pi \equiv 2.598076$$

$$n = 15 \to \pi \equiv \frac{15}{2}.\sin 24^\circ \Rightarrow \pi \equiv 3.050524$$

$$n = 36 \to \pi \equiv \frac{36}{2}.\sin 10^\circ \Rightarrow \pi \equiv 3.125667$$

$$n = 180 \to \pi \equiv \frac{180}{2}.\sin 2^\circ \Rightarrow \pi \equiv 3.140954$$

$$n = 360 \to \pi \equiv \frac{360}{2}.\sin 1^\circ \Rightarrow \pi \equiv 3.141433$$

$$n = 1000 \to \pi \equiv \frac{1000}{2}.\sin\frac{360^\circ}{1000} \Rightarrow \pi \equiv 3.141572$$

$$n = 10000 \to \pi \equiv \frac{10000}{2}.\sin\frac{360^\circ}{10000} \Rightarrow \pi \equiv 3.141592$$

ابهام در نمادگذاری!

اگر g={(۲,۳), (۳,۶), (۵,۶), (۷,۲)} و f={(۲,۳), (۳,۴), (۴,۵), (۵,۶)} توابعی روی Z باشند، f-g کدام است؟

الف) f-g={(۳,۴), (۴,۵)}

ب) f-g={(۲,۰), (۳,-۲), (۵,۰)}